

Scomposizione di polinomi

Schemi per lo studio · Classe II · strumento compensativo

Nome _____

Classe _____

● **A** = 1° termine ● **B** = 2° termine ● **C** = 3° termine Scomporre = scrivere come **prodotto** di fattori

COME PROCEDO (SEMPRE IN QUEST'ORDINE)

1. **Raccolgo il fattore comune**, se c'è (scheda 1). Se il 1° termine è negativo, raccolgo anche il -.
2. **Conto i termini** e scelgo il metodo con la tabella qui sotto.
3. **Controllo ogni fattore**: si scompone ancora? Continuo finché posso.
4. **Verifico**: moltiplico i fattori e devo ritrovare il polinomio di partenza.

QUANTI TERMINI HA IL POLINOMIO? → NUMERO DELLA SCHEDA

2 termini	$A^2 - B^2$ (2)	$A^3 \pm B^3$ (8)	$A^2 + B^2 \rightarrow$ non si scompone
3 termini	quadrato di binomio (3)	$x^2 + Sx + P$ (4)	$ax^2 + bx + c$ (9)
4 termini	raccoglimento parziale (5)	cubo di binomio (7)	"3 + 1": $(\dots)^2 - B^2$ (11)
6 termini	quadrato di trinomio (6)	raccoglimento parziale (5)	
grado 3 o più	dopo aver escluso gli altri metodi, provo Ruffini (10)		

RICONOSCERE QUADRATI E CUBI

Quadrati 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 | lettere con esponente **pari**: $x^2, x^4, x^6 \dots$
es. $9x^4 = (3x^2)^2$ $\frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a)^2$ radice: esponente **diviso 2**

Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 1000 | esponente **multiplo di 3**: $x^3, x^6, x^9 \dots$
es. $8x^6 = (2x^2)^3$ $27a^3 = (3a)^3$ radice cubica: esponente **diviso 3**

ATTENZIONE: ERRORI DA EVITARE

✗ $3x^2 + x = x(3x)$

✓ $x(3x + 1)$: quando raccolgo un termine intero resta 1

✗ $x^2 - 9 = (x - 3)^2$

✓ $(x + 3)(x - 3)$

✗ $ax - ay - bx + by = a(x - y) - b(x + y)$

✓ $-b(x - y)$: raccogliendo -b i segni cambiano

✗ $x^2 + 4 = (x + 2)(x - 2)$

✓ somma di quadrati: non si scompone

✗ $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ e mi fermo

✓ $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

✗ $x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

✓ $(x - 2)(x - 3)$: S negativa → numeri negativi

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C) \quad A = \text{fattore comune}$$

- **Numero:** MCD dei coefficienti.
- **Lettere:** solo quelle presenti in **tutti** i termini, con l'esponente **più piccolo**.
- **Dentro la parentesi:** divido ogni termine per il fattore comune.
- Se un termine è uguale al fattore comune, dentro resta **1**.
- Se il 1° termine è negativo, raccolgo anche il -: i segni dentro cambiano.
- Il fattore comune può essere anche una **parentesi** intera.

a) Solo numeri

$$6x + 9 \rightarrow \text{MCD}(6, 9) = 3$$

$$= 3 \cdot (2x + 3)$$

b) Lettere con esponenti

$$4a^3 - 6a^2 \rightarrow \text{MCD} = 2, a \text{ con esponente minore: } a^2$$

$$= 2a^2 \cdot (2a - 3)$$

c) Resta 1

$$3x^2 + x \rightarrow \text{fattore comune: } x$$

$$= x \cdot (3x + 1) \leftarrow x : x = 1$$

d) Tre termini, due lettere

$$10x^3y^2 - 15x^2y^3 + 5x^2y$$

$$\rightarrow \text{MCD} = 5; x^2 \text{ e } y \text{ (esponenti minori)}$$

$$= 5x^2y \cdot (2xy - 3y^2 + 1)$$

e) Raccolgo il segno meno

$$-2x^2 - 8x \rightarrow \text{raccolgo } -2x$$

$$= -2x \cdot (x + 4)$$

f) Con le frazioni

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x \rightarrow \text{raccolgo } \frac{1}{4}x$$

$$= \frac{1}{4}x \cdot (2x - 1)$$

g) Fattore comune = parentesi

$$a \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x + 1)$$

$$= (x + 1) \cdot (a + 3)$$

h) Parentesi opposte

$$x \cdot (a - b) - y \cdot (b - a) \rightarrow (b - a) = -(a - b)$$

$$= x \cdot (a - b) + y \cdot (a - b)$$

$$= (a - b) \cdot (x + y)$$

2 DIFFERENZA DI QUADRATI

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

- **Riconosco:** 2 termini, entrambi **quadrati**, separati dal **meno**.
- **A** = radice del 1° termine, **B** = radice del 2° termine.
- Radice di un monomio: radice del numero, esponenti **diviso 2**.
- **A² + B²** (somma di quadrati) **non si scompone**.
- Dopo aver scomposto, controllo se (A - B) si scompone ancora.
- Se il termine negativo è il primo, riordino:
 $-x^2 + 49 = 49 - x^2$.

a) Base

$$x^2 - 25 \rightarrow A = x, B = 5$$
$$= (x + 5)(x - 5)$$

b) Con coefficienti e due lettere

$$9a^2 - 4b^2 \rightarrow A = 3a, B = 2b$$
$$= (3a + 2b)(3a - 2b)$$

c) Si scompone due volte

$$16x^4 - 1 \rightarrow A = 4x^2, B = 1$$
$$= (4x^2 + 1)(4x^2 - 1)$$
$$= (4x^2 + 1)(2x + 1)(2x - 1)$$

d) Con le frazioni

$$\frac{1}{4}x^2 - 9 \rightarrow A = \frac{1}{2}x, B = 3$$
$$= (\frac{1}{2}x + 3)(\frac{1}{2}x - 3)$$

e) Primo termine negativo

$$-x^2 + 49 = 49 - x^2 \rightarrow A = 7, B = x$$
$$= (7 + x)(7 - x)$$

f) Prima raccolgo

$$2x^2 - 18 = 2 \cdot (x^2 - 9)$$
$$= 2 \cdot (x + 3)(x - 3)$$

g) A è una parentesi

$$(x + 1)^2 - 4 \rightarrow A = (x + 1), B = 2$$
$$= (x + 1 + 2)(x + 1 - 2)$$
$$= (x + 3)(x - 1)$$

h) Esponenti alti

$$x^6 - y^4 \rightarrow A = x^3, B = y^2$$
$$= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A - B)^2$$

- **Riconosco:** 3 termini: **due quadrati** (positivi) e un **doppio prodotto**.
- Trovo **A** e **B** con le radici dei due quadrati.
- **Controllo** che il 3° termine sia proprio $2 \cdot A \cdot B$.
- Il segno del doppio prodotto è il segno **dentro la parentesi**.
- Se i quadrati sono negativi, prima raccolgo il $-$.
- Se il controllo non torna, **non** è un quadrato: provo il trinomio speciale.

a) Segno +

$$x^2 + 6x + 9 \rightarrow A = x, B = 3$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot x \cdot 3 = 6x \checkmark$$

$$= (x + 3)^2$$

b) Segno -

$$4a^2 - 12a + 9 \rightarrow A = 2a, B = 3$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot 2a \cdot 3 = 12a \checkmark$$

$$= (2a - 3)^2$$

c) Due lettere

$$25x^2 + 10xy + y^2 \rightarrow A = 5x, B = y$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot 5x \cdot y = 10xy \checkmark$$

$$= (5x + y)^2$$

d) Con le frazioni

$$\frac{1}{4}a^2 + a + 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}a, B = 1$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 1 = a \checkmark$$

$$= \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$$

e) Poi continuo

$$x^4 - 2x^2 + 1 \rightarrow A = x^2, B = 1$$

$$= (x^2 - 1)^2$$

$$= (x + 1)^2(x - 1)^2$$

f) Quadrati negativi

$$-x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16)$$

$$= -(x - 4)^2$$

g) Attenzione: non è un quadrato!

$$x^2 + 5x + 9 \rightarrow A = x, B = 3$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot x \cdot 3 = 6x \neq 5x \times$$

non è un quadrato di binomio

4 TRINOMIO SPECIALE

somma e prodotto

$$x^2 + S \cdot x + P = (x + a) \cdot (x + b) \quad \text{con } a + b = S \quad a \cdot b = P$$

- **Riconosco:** 3 termini, x^2 con coefficiente 1, non è un quadrato.
- Cerco due numeri: **somma** = S (numero davanti a x), **prodotto** = P (termine noto).
- Parto dal **prodotto**: scrivo le coppie di divisori di P.
- **P positivo** → a e b hanno lo stesso segno (quello di S).
- **P negativo** → segni diversi; il più grande ha il segno di S.
- Se nessuna coppia funziona, **non si scompone**.

a) S +, P +

$$x^2 + 5x + 6 \rightarrow S = 5, P = 6$$

coppie di 6: 1·6, 2·3 → 2 + 3 = 5 ✓

$$= (x + 2)(x + 3)$$

b) S -, P +

$$x^2 - 7x + 12 \rightarrow S = -7, P = 12$$

coppie di 12: 1·12, 2·6, 3·4 → -3 e -4

$$= (x - 3)(x - 4)$$

c) S +, P -

$$x^2 + 2x - 15 \rightarrow S = 2, P = -15$$

+5 e -3: 5 - 3 = 2 ✓ e 5·(-3) = -15 ✓

$$= (x + 5)(x - 3)$$

d) S -, P -

$$x^2 - x - 20 \rightarrow S = -1, P = -20$$

-5 e +4: -5 + 4 = -1 ✓

$$= (x - 5)(x + 4)$$

e) Con x^4 (la variabile è x^2)

$$x^4 - 5x^2 + 4 \rightarrow S = -5, P = 4: -1 e -4$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

f) Con due lettere

$$a^2 + 3ab + 2b^2 \rightarrow S = 3b, P = 2b^2: b e 2b$$

$$= (a + b)(a + 2b)$$

g) Non si scompone

$$x^2 + x + 1 \rightarrow S = 1, P = 1: \text{solo } 1 \cdot 1, \text{ ma } 1 + 1 = 2 \neq 1$$

non si scompone

5 RACCOGLIMENTO PARZIALE

a gruppi

$$a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) \\ = (x + y) \cdot (a + b)$$

- **Riconosco:** 4 (o 6) termini senza un fattore comune a tutti.
- Divido i termini in **gruppi** e raccolgo in ogni gruppo.
- Le parentesi devono venire **uguali**: poi raccolgo la parentesi.
- Se un gruppo non ha fattori comuni, raccolgo 1 (o -1).
- Se raccolgo un numero **negativo**, i segni nella parentesi cambiano.
- Se le parentesi non vengono uguali: **riordini** i termini e riprovo.

a) Base

$$3x + 3y + ax + ay$$

$$= 3 \cdot (x + y) + a \cdot (x + y)$$

$$= (x + y) \cdot (3 + a)$$

b) Raccolgo un negativo

$$ax - ay - bx + by \rightarrow \text{nel 2° gruppo raccolgo } -b$$

$$= a \cdot (x - y) - b \cdot (x - y)$$

$$= (x - y) \cdot (a - b)$$

c) Resta 1

$$x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= x^2 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x + 1)$$

$$= (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

d) Gruppi diversi

$$2ab - 6a + b - 3$$

$$= 2a \cdot (b - 3) + 1 \cdot (b - 3)$$

$$= (b - 3) \cdot (2a + 1)$$

e) Prima riordino

$$5x + ay + 5y + ax$$

$$= 5x + 5y + ax + ay$$

$$= 5 \cdot (x + y) + a \cdot (x + y) = (x + y) \cdot (5 + a)$$

f) Sei termini

$$ax + bx + cx + ay + by + cy$$

$$= x \cdot (a + b + c) + y \cdot (a + b + c)$$

$$= (a + b + c) \cdot (x + y)$$

6 QUADRATO DI TRINOMIO

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A \cdot C + 2 \cdot B \cdot C = (A + B + C)^2$$

- **Riconosco:** 6 termini: 3 quadrati e 3 doppi prodotti.
- Trovo **A**, **B**, **C** con le radici dei tre quadrati.
- **Segni:** do il + ad **A**, poi guardo i doppi prodotti.
- Doppio prodotto + → stesso segno; - → segni opposti.
- Controllo tutti e 3 i doppi prodotti.

a) Tutti positivi

$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$\rightarrow A = x, B = y, C = 1$$

$$= (x + y + 1)^2$$

b) Con segni misti

$$a^2 + b^2 + 4 - 2ab + 4a - 4b$$

$$-2ab \rightarrow B = -b; +4a \rightarrow C = +2$$

$$= (a - b + 2)^2$$

c) Con coefficienti

$$4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 12x - 6y$$

$$\rightarrow A = 2x, B = y, C = -3$$

$$\text{controllo: } 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy \checkmark \quad 2 \cdot 2x \cdot (-3) = -12x \checkmark \quad 2 \cdot y \cdot (-3) = -6y \checkmark$$

$$= (2x + y - 3)^2$$

7 CUBO DI BINOMIO

$$A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 - B^3 = (A - B)^3$$

- **Riconosco:** 4 termini: il primo e l'ultimo sono cubi.
- **A** = radice cubica del 1°, **B** = radice cubica dell'ultimo.
- Radice cubica di un monomio: radice del numero, esponenti **diviso 3**.
- **Controllo** i due termini in mezzo: $3 \cdot A^2 \cdot B$ e $3 \cdot A \cdot B^2$.
- Segni tutti + → $(A + B)^3$; segni + - + - → $(A - B)^3$.
- Se il 1° termine è negativo, raccolgo il -.

a) Segni tutti +

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \rightarrow A = x, B = 2$$

$$3 \cdot x^2 \cdot 2 = 6x^2 \checkmark \quad 3 \cdot x \cdot 4 = 12x \checkmark$$

$$= (x + 2)^3$$

b) Segni alternati

$$8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 \rightarrow A = 2a, B = 1$$

$$3 \cdot 4a^2 \cdot 1 = 12a^2 \checkmark \quad 3 \cdot 2a \cdot 1 = 6a \checkmark$$

$$= (2a - 1)^3$$

c) Due lettere

$$27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3 \rightarrow A = 3x, B = y$$

$$3 \cdot 9x^2 \cdot y = 27x^2y \checkmark \quad 3 \cdot 3x \cdot y^2 = 9xy^2 \checkmark$$

$$= (3x + y)^3$$

d) Primo termine negativo

$$-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$= -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= -(x - 1)^3$$

8 SOMMA E DIFFERENZA DI CUBI

$$A^3 + B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - A \cdot B + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + A \cdot B + B^2)$$

- **Riconosco:** 2 termini, entrambi cubi.
- 1ª parentesi: **stesso segno** del polinomio.
- 2ª parentesi ("falso quadrato"): **A·B senza il 2**, con segno opposto.

- Il falso quadrato **non si scompone** più.
- Con x^6 : prima uso la differenza di quadrati.

a) Differenza

$$x^3 - 8 \rightarrow A = x, B = 2$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

b) Somma

$$27a^3 + 1 \rightarrow A = 3a, B = 1$$

$$= (3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$$

c) Esponenti alti

$$8x^3 - y^6 \rightarrow A = 2x, B = y^2$$

$$= (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$$

d) Prima raccolgo

$$2x^3 + 54 = 2 \cdot (x^3 + 27)$$

$$= 2 \cdot (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

e) Con x^6

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

f) Con le frazioni

$$\frac{1}{8}a^3 - 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}a, B = 1$$

$$= (\frac{1}{2}a - 1)(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + 1)$$

9 TRINOMIO $ax^2 + bx + c$

con $a \neq 1$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot x^2 + m \cdot x + n \cdot x + c$$

$$\text{con } m + n = b \quad m \cdot n = a \cdot c$$

- 1. Prima controllo se c'è un fattore comune.
- 2. Calcolo il prodotto $a \cdot c$.
- 3. Cerco **m** e **n**: somma = b, prodotto = $a \cdot c$.

- 4. Spezzo il termine $b \cdot x$ in $m \cdot x + n \cdot x$.
- 5. Faccio il **raccoglimento parziale** (scheda 5).

a) Tutto positivo

$$2x^2 + 7x + 3 \rightarrow a \cdot c = 6; 1 + 6 = 7$$

$$= 2x^2 + x + 6x + 3$$

$$= x(2x + 1) + 3(2x + 1) = (2x + 1)(x + 3)$$

b) Prodotto negativo

$$3x^2 - 5x - 2 \rightarrow a \cdot c = -6; -6 + 1 = -5$$

$$= 3x^2 - 6x + x - 2$$

$$= 3x(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(3x + 1)$$

c) Somma negativa

$$6x^2 - 5x + 1 \rightarrow a \cdot c = 6; -2 + -3 = -5$$

$$= 6x^2 - 2x - 3x + 1$$

$$= 2x(3x - 1) - (3x - 1) = (3x - 1)(2x - 1)$$

d) Termine noto negativo

$$4x^2 + 4x - 3 \rightarrow a \cdot c = -12; 6 + -2 = 4$$

$$= 4x^2 + 6x - 2x - 3$$

$$= 2x(2x + 3) - (2x + 3) = (2x + 3)(2x - 1)$$

$$\text{se } P(r) = 0 \rightarrow P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$$

- **1. Candidati r:** divisori del termine noto, con + e -.
- Se il 1° coefficiente non è 1, provo anche le frazioni: (divisori del termine noto) : (divisori del 1° coefficiente).
- **2. Sostituisco r in P(x):** se viene 0, r va bene.
- **3. Tabella:** coefficienti in ordine (0 se manca una potenza). Abbasso il 1°, multiplico per r, sommo, ...
- **4. L'ultima casella (resto) deve essere 0.** Gli altri numeri sono i coefficienti di Q(x) (un grado in meno).
- **5. Scompongo ancora Q(x).** Attenzione: r = -1 dà il fattore (x + 1).

a) Radice positiva

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \rightarrow \text{divisori di 6: } \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \checkmark \rightarrow r = 1$$

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

$$= (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

b) Manca una potenza: metto 0

$$x^3 - 7x + 6 \rightarrow \text{coefficienti: } 1, 0, -7, 6$$

$$P(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \checkmark \rightarrow r = 1$$

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

$$= (x - 1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

c) Radice negativa

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$P(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0 \checkmark \rightarrow r = -1$$

	1	6	11	6
-1		-1	-5	-6
	1	5	6	0

$$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

d) Primo coefficiente ≠ 1

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \rightarrow \text{candidati: } \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$$

$$P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0 \checkmark \rightarrow r = 2$$

	2	-3	-3	2
2		4	2	-2
	2	1	-1	0

$$= (x - 2)(2x^2 + x - 1)$$

$$= (x - 2)(2x - 1)(x + 1)$$

11 SCOMPOSIZIONI IN PIÙ PASSAGGI

si continua finché si può

- Dopo ogni passaggio **controllo ogni fattore:** si scompone ancora?
- Il fattore raccolto all'inizio va **riscritto** fino alla fine.
- Mi fermo quando nessun fattore si scompone più.
- **Verifica:** multiplico i fattori e devo ritrovare il polinomio iniziale.

a) Raccoglimento + differenza di quadrati

$$3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$$

$$= 3x(x + 2)(x - 2)$$

b) Raccoglimento + quadrato di binomio

$$2a^2 + 12a + 18 = 2(a^2 + 6a + 9)$$

$$= 2(a + 3)^2$$

c) Raccoglimento + trinomio speciale

$$5x^3 + 10x^2 - 15x = 5x(x^2 + 2x - 3)$$

$$= 5x(x + 3)(x - 1)$$

d) Differenza di quadrati due volte

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

e) Gruppo "3 + 1": quadrato - quadrato

$$x^2 - 2x + 1 - y^2 = (x - 1)^2 - y^2$$

$$= (x - 1 + y)(x - 1 - y)$$

f) Parziale + differenza di quadrati

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x - 2) - 9(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 3)(x - 3)$$

g) Parziale + differenza di quadrati

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a - 1) - (a - 1)$$

$$= (a - 1)(a^2 - 1) = (a - 1)^2(a + 1)$$

h) Raccoglimento + somma di cubi

$$a^4 + a = a(a^3 + 1)$$

$$= a(a + 1)(a^2 - a + 1)$$