

● **arancio** = C.E. (valori vietati) ● **blu** = m.c.m. ● **verde** = accettabile ● **rosso** = non accettabile

CHE COS'È UN'EQUAZIONE FRATTA

È un'equazione con l'incognita x al denominatore.

$$\frac{3}{x-2} = 1 \quad \checkmark \text{ fratta} \quad \frac{x}{2} + 1 = 3 \quad \times \text{ non fratta: al denominatore c'è solo un numero}$$

Un denominatore **non può mai essere 0**: per questo servono le **condizioni di esistenza (C.E.)**, che dicono quali valori di x sono vietati.

IL METODO IN 6 PASSI (SEMPRE IN QUEST'ORDINE)

- | | | |
|---|--|-----------------|
| 1 | Scompongo i denominatori | strumento 2 |
| 2 | Scrivo le C.E. : ogni fattore del denominatore $\neq 0$ | strumento 1 |
| 3 | Calcolo il m.c.m. dei denominatori | strumento 3 |
| 4 | Elimino i denominatori: multiplico ogni termine per il m.c.m. | strumenti 4 e 5 |
| 5 | Risolve l'equazione senza denominatori | strumenti 6 e 7 |
| 6 | Confronto con le C.E. e scrivo la soluzione S | strumento 8 |

ATTENZIONE: ERRORI DA EVITARE

✗ Dimentico le C.E.

✓ le scrivo **prima** di eliminare i denominatori

✗ $-(x-2) = -x-2$

✓ $-(x-2) = -x+2$: cambio **tutti** i segni

✗ Indeterminata: $S = \mathbb{R}$

✓ $S = \mathbb{R} - \{\text{valori vietati}\}$

✗ $\frac{3}{x-2} = 1 \rightarrow 3 = 1$

✓ $3 = 1 \cdot (x-2)$: anche il numero si moltiplica per il m.c.m.

✗ $\frac{x+2}{x} = 2$ semplificando le x

✓ si semplificano solo i **fattori**, mai i termini

✗ Trovo $x = 3$ e mi fermo

✓ controllo sempre con le C.E.: può essere vietata

1 Condizioni di esistenza (C.E.)denominatore $\neq 0$ ► Se il denominatore è un prodotto: $A \cdot B \neq 0 \rightarrow A \neq 0$ e $B \neq 0$ $x \neq 0$

$$x - a \neq 0 \rightarrow x \neq a$$

$$x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

$$x + a \neq 0 \rightarrow x \neq -a$$

$$x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

$$a \cdot x + b \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{b}{a} \text{ con } a \neq 0$$

$$2x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$(x - a)^2 \neq 0 \rightarrow x \neq a$$

numero, $x^2 + 1 \rightarrow$ mai 0

nessuna condizione

2 Scomposizioni utili nei denominatori

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$$

$$a \cdot x + a \cdot b = a \cdot (x + b)$$

$$2x - 4 = 2(x - 2) \quad x^2 + x = x(x + 1)$$

$$x^2 + S \cdot x + P = (x + m)(x + n)$$

$$m + n = S, \quad m \cdot n = P$$

3 m.c.m. dei denominatori**tutti i fattori**, una volta sola, con l'esponente più grande► Prendo i fattori **comuni e non comuni**.

► Per i numeri: m.c.m. dei numeri.

$$2(x - 1), (x - 1)^2, 4x \rightarrow \text{m.c.m.} = 4x(x - 1)^2$$

4 Denominatori opposti

$$a - x = -(x - a)$$

$$\frac{1}{2 - x} = -\frac{1}{x - 2}$$

► Cambio il segno al denominatore e davanti alla frazione.

5 Eliminare i denominatori

sempre nel rispetto delle C.E.

m.c.m. : denominatore $\times$ numeratore

- I termini **senza denominatore** si moltiplicano per **tutto** il m.c.m.
- Se davanti alla frazione c'è il $-$, cambio segno a tutto il numeratore: $-(x - 2) = -x + 2$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \rightarrow A \cdot D = B \cdot C$$

prodotto in croce (una sola frazione per parte)

$$\frac{A}{B} = 0 \rightarrow A = 0$$

frazione uguale a zero (basta il numeratore = 0)

6 Equazione $a \cdot x = b$

$$a \cdot x = b$$

$a \neq 0$	$x = \frac{b}{a}$	determinata
------------	-------------------	--------------------

$a = 0, b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	impossibile
-------------------	-----------------	--------------------

$a = 0, b = 0$	$0 \cdot x = 0$	indeterminata
----------------	-----------------	----------------------

7 Legge di annullamento del prodotto

$$A \cdot B = 0 \rightarrow A = 0 \text{ oppure } B = 0$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0 \rightarrow x = -2 \text{ oppure } x = 2$$

- Serve quando l'equazione diventa di **2° grado**: porto tutto a sinistra e scompongo.

8 Confronto con le C.E. e soluzione S

accettabile = non vietata dalle C.E.

$x = \text{numero non vietato}$	accettabile	$S = \{\text{numero}\}$
---------------------------------	--------------------	-------------------------

$x = \text{numero vietato}$	non accettabile	$S = \emptyset$
-----------------------------	------------------------	-----------------

$0 \cdot x = \text{numero} \neq 0$	impossibile	$S = \emptyset$
------------------------------------	--------------------	-----------------

$0 \cdot x = 0$	indeterminata	$S = \mathbb{R} - \{\text{vietati}\}$
-----------------	----------------------	---------------------------------------

A

Casi semplici

una sola frazione o una frazione per parte

1 UNA FRAZIONE UGUALE A UN NUMERO

accettabile

$$\frac{3}{x-2} = 1$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
- 3 m.c.m. $x - 2$
- 4 Elimino i denominatori $3 = 1 \cdot (x - 2) \leftarrow$ il numero 1 si moltiplica per tutto il m.c.m.
- 5 Risolvo $x - 2 = 3 \rightarrow x = 3 + 2 \rightarrow x = 5$
- 6 Confronto con le C.E. $5 \neq 2 \rightarrow$ **accettabile** ✓

$$S = \{5\}$$

2 FRAZIONE UGUALE A ZERO

accettabile

$$\frac{x-3}{x+1} = 0$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$
- 3 m.c.m. $x + 1$
- 4 Elimino i denominatori frazione = 0 $\rightarrow$ basta che il **numeratore** sia 0: $x - 3 = 0$
- 5 Risolvo $x = 3$
- 6 Confronto con le C.E. $3 \neq -1 \rightarrow$ **accettabile** ✓

$$S = \{3\}$$

3 UNA FRAZIONE PER PARTE: PRODOTTO IN CROCE

accettabile

$$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+2}$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$
- 3 m.c.m. $(x - 1)(x + 2)$
- 4 Elimino i denominatori prodotto in croce: $2 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (x - 1)$
- 5 Risolvo $2x + 4 = 3x - 3 \rightarrow 2x - 3x = -3 - 4 \rightarrow -x = -7 \rightarrow x = 7$
- 6 Confronto con le C.E. $7 \neq 1, 7 \neq -2 \rightarrow$ **accettabile** ✓

$$S = \{7\}$$

B

Denominatori da scomporre

differenza di quadrati, raccoglimento, quadrato di binomio, numeri, denominatori opposti

4 DIFFERENZA DI QUADRATI NEL DENOMINATORE

accettabile

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$$

- 1 Scompongo $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
- 2 C.E. $x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$ $x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$
- 3 m.c.m. $(x+3)(x-3)$
- 4 Elimino i denominatori $1 \cdot (x+3) + 2 \cdot (x-3) = 12 \leftarrow \text{m.c.m. : denominatore, poi } \times \text{ numeratore}$
- 5 Risolvo $x+3+2x-6=12 \rightarrow 3x=12+3 \rightarrow 3x=15 \rightarrow x=5$
- 6 Confronto con le C.E. $5 \neq 3, 5 \neq -3 \rightarrow \text{accettabile} \checkmark$

$$S = \{5\}$$

5 RACCOGLIMENTO · SOLUZIONE CON FRAZIONE

accettabile

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$$

- 1 Scompongo $x^2 + x = x(x+1)$
- 2 C.E. $x \neq 0$ $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$
- 3 m.c.m. $x(x+1)$
- 4 Elimino i denominatori $3 \cdot (x+1) - 2 = 1 \cdot x$
- 5 Risolvo $3x+3-2=x \rightarrow 3x-x=-1 \rightarrow 2x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$
- 6 Confronto con le C.E. $-\frac{1}{2} \neq 0, -\frac{1}{2} \neq -1 \rightarrow \text{accettabile} \checkmark$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

6 QUADRATO DI BINOMIO NEL DENOMINATORE

accettabile

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2 - 4x + 4} = 0$$

- 1 Scompongo $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
- 2 C.E. $(x - 2)^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
- 3 m.c.m. $(x - 2)^2 \leftarrow$ esponente più grande
- 4 Elimino i denominatori $1 \cdot (x - 2) - 2 = 0$
- 5 Risolvo $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
- 6 Confronto con le C.E. $4 \neq 2 \rightarrow$ accettabile ✓

$$S = \{4\}$$

7 DENOMINATORI CON NUMERI

accettabile

$$\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$$

- 1 Scompongo $2x - 4 = 2(x - 2)$
- 2 C.E. $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$ (il numero 2 non dà condizioni)
- 3 m.c.m. $2(x - 2)$
- 4 Elimino i denominatori $2 \cdot x - 1 \cdot (x - 2) = 3$
- 5 Risolvo $2x - x + 2 = 3 \rightarrow x = 3 - 2 \rightarrow x = 1$
- 6 Confronto con le C.E. $1 \neq 2 \rightarrow$ accettabile ✓

$$S = \{1\}$$

8 DENOMINATORI OPPOSTI

accettabile

$$\frac{3}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 1$$

- 1 Scompongo $2 - x = -(x - 2) \rightarrow \frac{1}{2-x} = -\frac{1}{x-2}$
l'equazione diventa: $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-2} = 1$
- 2 C.E. $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
- 3 m.c.m. $x - 2$
- 4 Elimino i denominatori $3 - 1 = 1 \cdot (x - 2)$
- 5 Risolvo $x - 2 = 2 \rightarrow x = 4$
- 6 Confronto con le C.E. $4 \neq 2 \rightarrow$ accettabile ✓

$$S = \{4\}$$

9 LA SOLUZIONE È VIETATA DALLE C.E.

non accettabile → impossibile

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$$

- 1 Scompongo $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
- 2 C.E. $x \neq 3 \quad x \neq -3$
- 3 m.c.m. $(x+3)(x-3)$
- 4 Elimino i denominatori $1 \cdot (x+3) + 2 \cdot (x-3) = 6$
- 5 Risolvo $x+3+2x-6=6 \rightarrow 3x=9 \rightarrow x=3$
- 6 Confronto con le C.E. $x=3$ è vietato dalle C.E. → non accettabile X

S = ∅ (impossibile)

10 IMPOSSIBILE: $0 \cdot x = \text{NUMERO}$

impossibile

$$\frac{x+1}{x-2} - 1 = \frac{1}{x-2}$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
- 3 m.c.m. $x-2$
- 4 Elimino i denominatori $(x+1) - 1 \cdot (x-2) = 1 \leftarrow \text{il } - \text{ cambia i segni di tutta la parentesi}$
- 5 Risolvo $x+1-x+2=1 \rightarrow 0 \cdot x = 1-3 \rightarrow 0 \cdot x = -2$
- 6 Confronto con le C.E. nessun numero moltiplicato per 0 dà -2 → impossibile

S = ∅

11 INDETERMINATA: $0 \cdot x = 0$

indeterminata

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 1$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$
- 3 m.c.m. $x-1$
- 4 Elimino i denominatori $(x+2) - 3 = 1 \cdot (x-1)$
- 5 Risolvo $x-1=x-1 \rightarrow x-x=-1+1 \rightarrow 0 \cdot x = 0$
- 6 Confronto con le C.E. va bene ogni numero, tranne quelli vietati dalle C.E.

S = $\mathbb{R} - \{1\}$ (tutti i numeri tranne 1)

12 I TERMINI CON x^2 SI CANCELLANO

accettabile

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{x^2-1}$$

- 1 Scompongo $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
- 2 C.E. $x \neq 1 \quad x \neq -1$
- 3 m.c.m. $(x+1)(x-1)$
- 4 Elimino i denominatori $x \cdot (x+1) - (x+3) \cdot (x-1) = 5 \leftarrow \text{il } - \text{ vale per tutto il prodotto}$
- 5 Risolvo $x^2 + x - (x^2 + 2x - 3) = 5$
 $x^2 + x - x^2 - 2x + 3 = 5 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$
- 6 Confronto con le C.E. $-2 \neq 1, -2 \neq -1 \rightarrow$ **accettabile** ✓

$$S = \{-2\}$$

13 DIVENTA DI 2° GRADO: ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

1 soluzione accettabile su 2

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

- 1 Scompongo denominatori già scomposti
- 2 C.E. $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
- 3 m.c.m. $x - 2$
- 4 Elimino i denominatori $x^2 = 4$
- 5 Risolvo $x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \rightarrow x = -2 \text{ oppure } x = 2$
- 6 Confronto con le C.E. $x = -2 \rightarrow$ **accettabile** ✓ $x = 2 \rightarrow$ **vietato** X

$$S = \{-2\}$$

PRIMA DI CONSEGNARE CONTROLLO CHE...

- ☐ ho scomposto **tutti** i denominatori
- ☐ ho scritto le **C.E.** prima di eliminare i denominatori
- ☐ ho moltiplicato per il **m.c.m.** anche i termini senza denominatore
- ☐ ho cambiato i segni quando davanti alla frazione c'è il $-$
- ☐ ho **confrontato** la soluzione con le C.E.
- ☐ ho scritto la soluzione nella forma $S = \{ \dots \}$, $S = \emptyset$ oppure $S = \mathbb{R} - \{ \dots \}$