

Le Equazioni Lineari: L'Arte dell'Equilibrio

Dal concetto teorico alla risoluzione pratica: una guida alla simmetria logica.



Non sempre un'equilibrata uguaglianza è una condizione desiderabile. Nel mondo fisico, solo le disuguaglianze producono movimento. Ma in algebra, cerchiamo la perfezione statica: il valore esatto che rende vera l'uguaglianza.

Identità vs Equazione

Identità: Un'uguaglianza vera per qualsiasi valore.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{Always True})$$

Equazione: Un'uguaglianza verificata solo per particolari valori.

$$2x + 1 = 3x - 2 \quad (\text{True only if } x=3)$$

Anatomia dell'Equazione

Incognita

$2x + 1 = 3x - 2$

Primo membro

Secondo membro

Incognita

dal latino **'aequare'**
(rendere uguale)

La caccia alla soluzione

Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni.

Definizione

Soluzioni (o radici):
I valori che, sostituiti
all'incognita, rendono vera
l'uguaglianza.

Verifica

Il controllo matematico.

$$\text{Eq: } 2x + 1 = 3x - 2$$

Test $x = 3$:

$$2(3) + 1 = 3(3) - 2$$

$$7 = 7 \text{ (VERA)}$$

L'Insieme S

L'insieme di tutti i valori
che soddisfano
l'equazione.

L'equazione $x^2 = 4$ ha
due soluzioni.

$$S = \{2, -2\}$$

Classificare per risolvere

Intera

L'incognita è presente soltanto nei numeratori.

$$\frac{x}{2} = 1 + 7x$$

Fratta

L'incognita compare anche in uno o più denominatori.

$$\frac{1}{x-3} = \frac{x}{4} - 1$$

Numerica

Contiene solo numeri oltre all'incognita.

$$2x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3x}$$

Letterale

Contiene altre lettere (parametri) oltre all'incognita.

$$(1 - 2a)x = 3a + \frac{1}{4}$$

Il concetto di Equivalenza

Due equazioni contenenti la stessa incognita si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

$$3x^2 - 2x + 5 = 3x^2 + 1 \xrightarrow{\text{Semplificazione}} 2x - 4 = 0 \longrightarrow x = 2$$

Forma Normale (Canonica)

$$P(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad ax = b$$

Grado dell'equazione = esponente massimo dell'incognita nella forma normale.

Equazioni Lineari = 1° Grado

Il Primo Principio: La Bilancia



Primo Principio di Equivalenza:

Aggiungendo o sottraendo ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'*equazione equivalente*.

$$2x = 6 \rightarrow +5 \quad 2x + 5 = 6 + 5$$

Attenzione: Se si aggiunge un'espressione con l'incognita, verificare che non restringa il Campo di Esistenza.

Applicazioni del Primo Principio

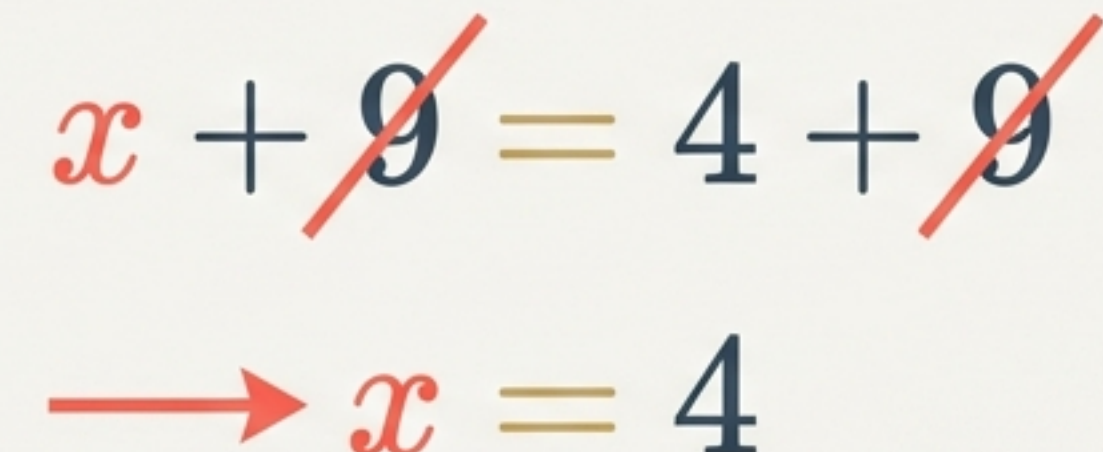
Regola del trasporto

Trasportare un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno.

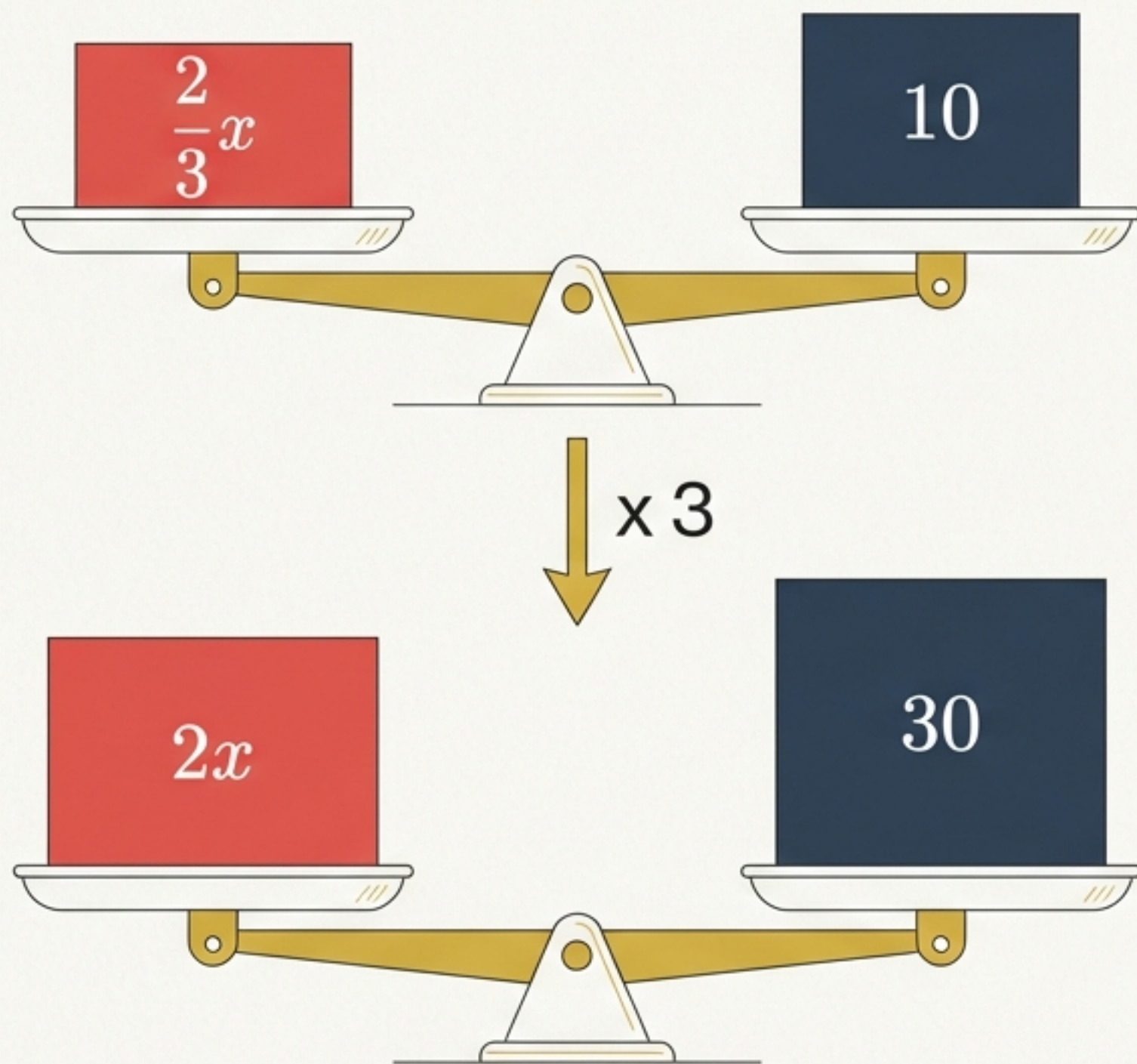

$$\begin{aligned}x + 2 &= 5 \\x &= 5 - 2 \\x &= 3\end{aligned}$$

Regola di cancellazione

Termini uguali in entrambi i membri possono essere soppressi.


$$\begin{aligned}x + \cancel{9} &= 4 + \cancel{9} \\ \longrightarrow x &= 4\end{aligned}$$

Il Secondo Principio: La Proporzione



Secondo Principio di Equivalenza:
Moltiplicando o dividendo i due membri per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene un'equazione equivalente.

$$\frac{2}{3}x = 10$$

Membri moltiplicati per 3

$$3 \cdot \frac{2}{3}x = 3 \cdot 10$$

$$2x = 30$$

Applicazioni del Secondo Principio

Cambiamento di segno

Moltiplicare entrambi i membri per -1
inverte tutti i segni.

$$-x = -5 \rightarrow x = 5$$

Eliminare i denominatori

Trasformare coefficienti frazionari in
interi tramite il m.c.m.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= x + \frac{5}{3} \\ \frac{3x}{6} &= \frac{6x + 10}{6} \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{6}} &= \frac{\cancel{6}x + \cancel{10}}{\cancel{6}} \\ 3x &= 6x + 10 \end{aligned}$$

Helvetica Now Display: La Strategia Risolutiva

1. Helvetica Now Display

1. **Semplificare:** Calcoli e parentesi.

$$4x - 9 + (x^2 - 1) = x^2 - 6x + 9 + 2x + 5$$

2. Helvetica Now Display

2. **Denominatori:** Eliminare con m.c.m.

(Nessun denominatore)

3. Helvetica Now Display

3. **Trasporto:** Incognite a sx, numeri a dx.

$$4x + x^2 - x^2 + 6x - 2x = 9 + 5 + 1 + 9$$

4. Helvetica Now Display

4. **Somma:** Forma normale $ax = b$.

$$8x = 24$$

5. Helvetica Now Display

5. **Isolamento:** Dividere per a .

$$\frac{8x}{8} = \frac{24}{8} \rightarrow x = 3$$

L'Esito: Determinata, Indeterminata, Impossibile

Forma normale $ax = b$

Determinata

Condition: $a \neq 0$

Result: Una soluzione unica.

Math: $x = \frac{b}{a}$

Indeterminata

Condition: $a = 0$ e $b = 0$

Result: Infinite soluzioni (Identità).

Math: $0x = 0$

Impossibile

Condition: $a = 0$ e $b \neq 0$

Result: Nessuna soluzione.

Math: $0x = b$

ESEMPIO $4x - 12 - 3x = 5 + x - 17 \rightarrow 0x = 0$ (Indeterminata)

Equazioni Numeriche Fratte

L'incognita compare al denominatore.

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

! C.E. Condizioni di Esistenza

Il denominatore non può essere 0.
Quindi $x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$.

Moltiplichiamo per $(x - 1)$:

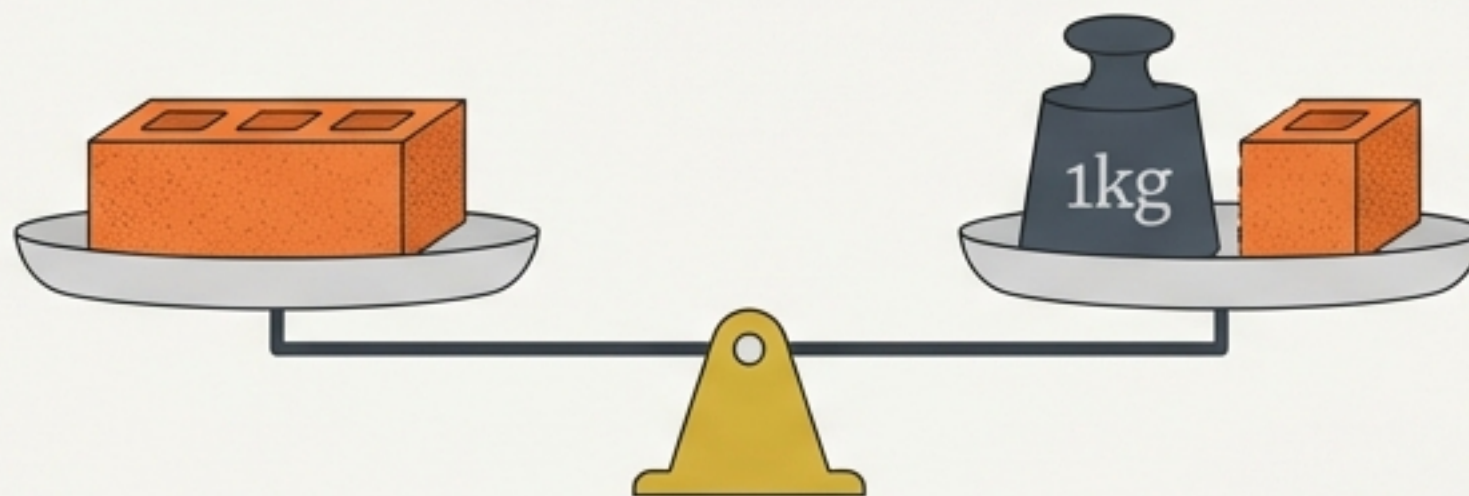
$$x = 1$$

Controllo accettabilità: 1 entra in conflitto con C.E. $(x \neq 1)$.

Conclusione: L'equazione è **impossibile**.

Modellizzare la Realtà

Il problema del mattone.



Problema: Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone.

Incognita: x = peso del mattone.

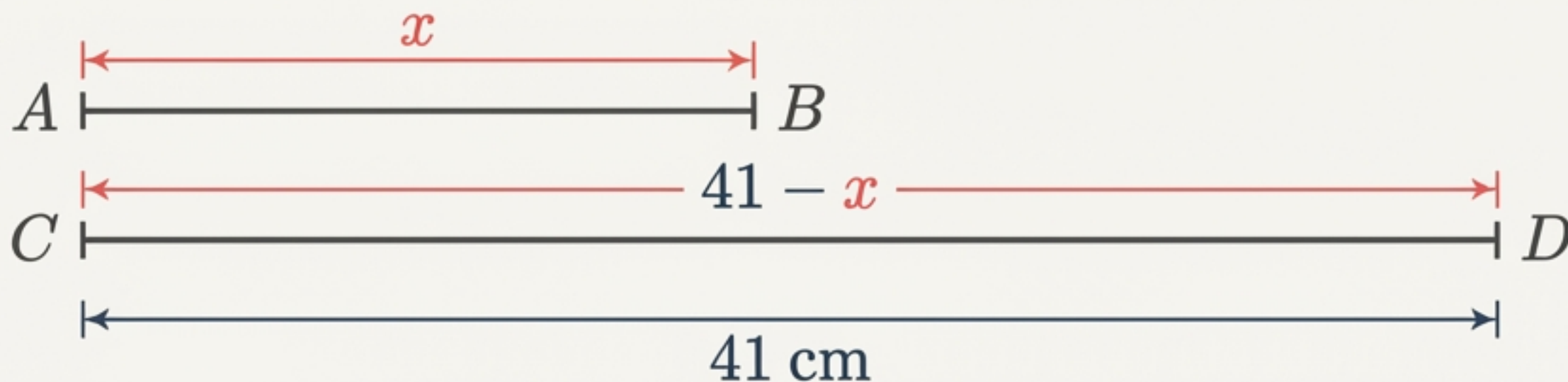
Equazione: $x = 1 + \frac{1}{2}x$.

Risoluzione: $2x = 2 + x \rightarrow x = 2$.

Risposta: Il mattone pesa 2 kg.

Applicazione Geometrica

Determinare due segmenti sapendo che la somma è 41 cm e uno supera di 8 cm la metà dell'altro.



Relazione: $AB = \frac{1}{2}CD + 8$

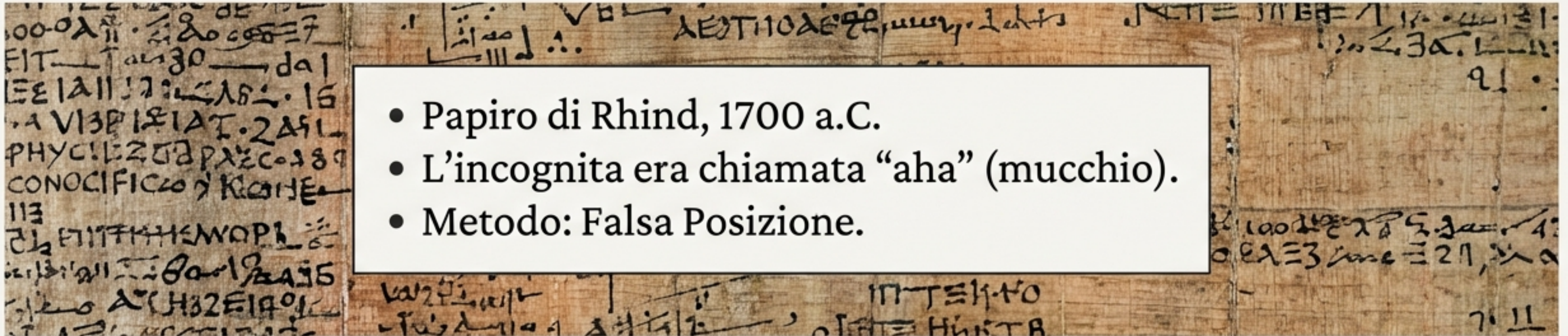
Sostituzione: $x = \frac{1}{2}(41 - x) + 8$

Risoluzione: $2x = 41 - x + 16$

$3x = 57 \rightarrow x = 19$

Risultato: $AB=19 \text{ cm}$, $CD=22 \text{ cm}$.

Un'eredità millenaria



L'Equilibrio ritrovato

- Un'equazione è una domanda di verità.
- I Principi di Equivalenza mantengono l'equilibrio.
- Obiettivo: Forma Normale ($a \cdot x = b$).
- Attenzione ai domini (C.E.).

L'algebra è l'arte di smascherare l'ignoto mantenendo intatta la verità.